קלאסית 1 – תרגול 8

מערכות יחוס לא אינרציאליות

מערכות יחוס לא מסתובבות

כדי לתאר מיקומים במערכות יחוס שונות, השתמשנו בביטוי הבא

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

כאשר, למשל, $\vec{r}'$ הוא המיקום במערכת היחוס שראשיתה ב-O', $\vec{r}$ יהיה המיקום במערכת היחוס שראשיתה ב-O ו-$\vec{R}$ יהיה המיקום של ראשית הצירית O' מערכת O ($\vec{R} = \vec{O}' - \vec{O}$).

חוקי ניוטון תקפים רק במערכות יחוס אינרציאליות (לא מאיצות).

אם נרצה בכל זאת לעבור במערכת לא אינרציאלית (מאיצה), נגזור פעמיים את הביטוי שמעביר את וקטור המיקום בין מערכות יחוס ונקבל

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$$

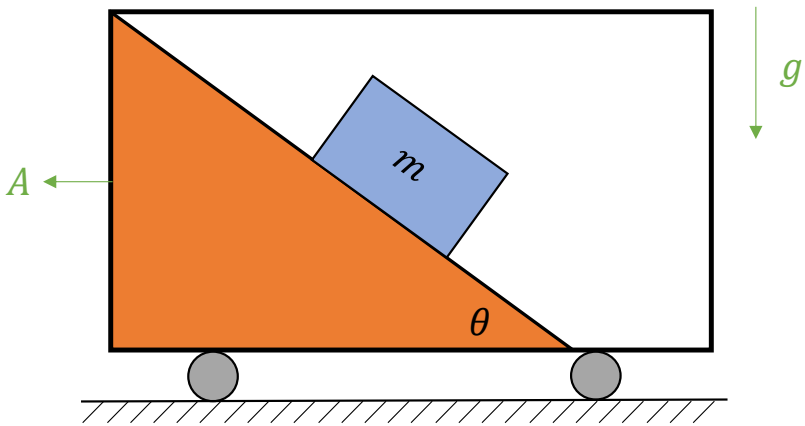
נוכל עכשיו להכפיל הכל ב-m, מסת הגוף המואץ (שאת מיקומו אנחנו מתארים)

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$$

מערכות יחוס לא מסתובבות

שאלה 1

גוף בעל מסה m מונח על מישור משופע בזווית θ ביחס לאופק. המישור מותקן בקרון המאיץ שמאלה בתאוצה A. מקדם החיכוך בין המסה למישור הוא μ והוא זהה עבור חיכוך סטטי או קינטי.



א. מצאו את תאוצת הגוף ביחס למישור המשופע.
הניחו שהמסה נשארת על המישור.

ב. מה קורה כאשר A משנה את כיוונו?

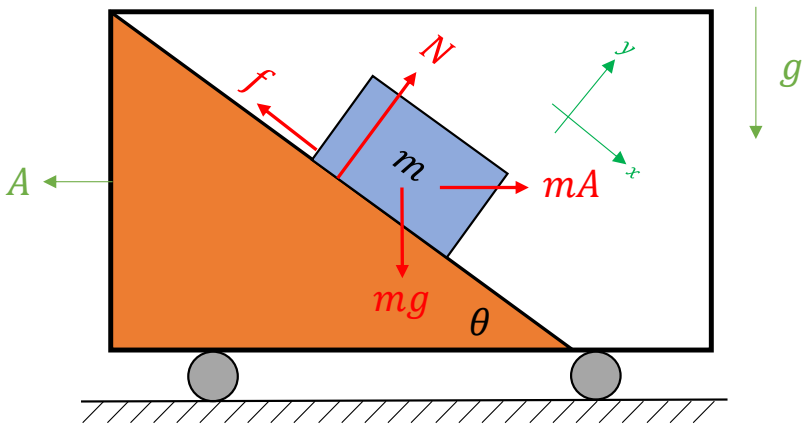
ג. כאשר התאוצה A פועלת ימינה, מה צריך להיות גודלה על מנת שהמסה תאיץ במעלה המדרון?

מערכות יחוס לא מסתובבות

שאלה 1 - פתרון

נפתור במערכת הקרון (המאיצה), ונבחר את מערכת הקואורדינטות שלנו להיות בכיוון המדרון.

נסמן את הכוחות ונכתוב את משוואות הכוחות לכל ציר



$$N + mA\sin\theta - mg\cos\theta = 0$$

$$mg\sin\theta + mA\cos\theta - f = ma$$

נשתמש במשוואה הראשונה בשביל N ונבטא איתה במפורש את f

$$\cancel{m}g\sin\theta + \cancel{m}A\cos\theta - \mu\cancel{m}(g\cos\theta - A\sin\theta) = \cancel{m}a$$

$$\boxed{a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) + A(\cos\theta + \mu\sin\theta)}$$

ב. מה קורה כאשר A משנה כיוון?

בסעיף א' קבלנו תאוצה שלא יכולה להיות שלילית (אינטואיטיבית – הכח היחיד שפועל במעלה המדרון הוא החיכוך, והוא לא יכול להיות גדול יותר מסכום הכוחות אליהם הוא מתנגד).

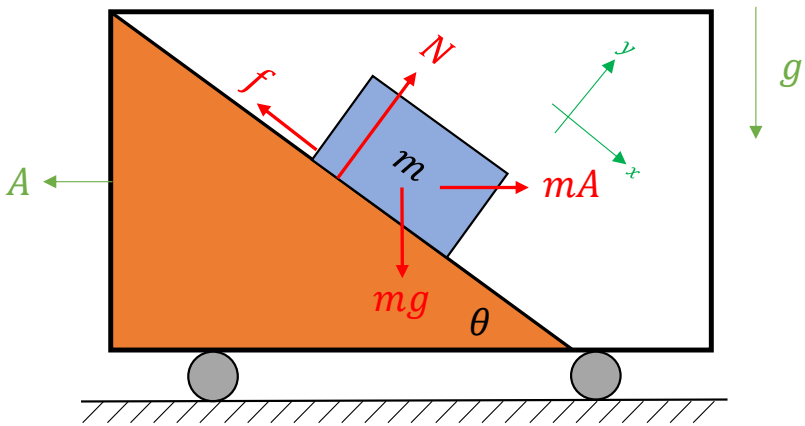
כאשר נשנה את כיוון התאוצה של הקרון, A, נוכל לקבל שני מקרים – תאוצה של הגוף במורד המדרון או במעלה המדרון.

מערכות יחוס לא מסתובבות

שאלה 1 - פתרון

עבור תאוצה במורד המדרון התאוצה תהיה זהה לסעיף א', רק עם החלפה של $A \to -A$

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) - A(\cos\theta + \mu\sin\theta)$$



עבור תאוצה במעלה המדרון, נחליף גם את כיוון החיכוך - $\mu \to -\mu$

$$a = g(\sin\theta + \mu\cos\theta) - A(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

ג. כאשר התאוצה A פועלת ימינה, מה צריך להיות גודלה על מנת שהמסה תאיץ במעלה המדרון?

נדרוש שהביטוי האחרון שקבלנו יהיה שלילי ונבודד את A

$$A > g\left(\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}\right)$$

מערכות יחוס מסתובבות

נניח שתי מערכות יחוס, O ו-O' המסתובבות אחת ביחס לשניה בתדירות זוויתית קבועה ω.
נקרא ל-O מערכת המעבדה. וקטורי המיקום של חלקיק בכל אחת מהמערכות הם

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{x}'(t) + y'(t)\hat{y}'(t) + z'(t)\hat{z}'(t)$$

נשים לב שבמערכת היחוס המסתובבת גם לוקטורי היחידה יש תלות בזמן.
עוד נשים לב שמכיוון שנקודת ראשית הצירים משותפת לשתיהן, $\vec{R} = 0$ ולכן

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} = \vec{r}$$

נניח עכשיו, בה"כ, שציר הסיבוב של שתי מערכות היחוס (שעובר בראשית של שתיהן) בכיוון $\hat{z} = \hat{z}'$.
אז נוכל לכתוב

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

מערכות יחוס מסתובבות

ובגלל ש-$\vec{r} = \vec{r}'$ נקבל גם

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}' + x'\dot{\hat{x}}' + y'\dot{\hat{y}}' + z'\dot{\hat{z}}'$$

כאשר גזרנו גם את וקטורי היחידה של המערכת המסתובבת כי הם תלוים בזמן במערכת המעבדה.

בגלל שהנחנו ש-$\hat{z} = \hat{z}'$ נקבל ש-$\dot{\hat{z}}' = 0$.

נוכל גם לתאר את המהירות כפי שהיא נמדדת במערכת המסתובב (שם וקטורי היחידה של המערכת המסתובבת קבועים)

$$\vec{v}' = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'$$

ולקבל בסה"כ

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'\dot{\hat{x}}' + y'\dot{\hat{y}}'$$

זאת אומרת שהאיברים שמיצגים את הסיבוב היחסי בין המערכות באים מגיעים מהשינוי בוקטורי הבסיס על מישור הסיבוב.

מערכות יחוס מסתובבות

ונשים לב שווקטורי היחידה של המערכת המסתובבת O' הם בעצם וקטורי היחידה הפולרים

$$\hat{x}' = \cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y} \ = \hat{r}$$

$$y' = -\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y} \ = \hat{\theta}$$

כך שנוכל עכשיו למצוא את הנגזרות של וקטורי הבסיס של המערכת המסתובבת

$$\dot{\hat{x}}' = \dot{\hat{r}} \ = \omega\hat{\theta} = \omega\hat{y}'$$

$$\dot{y}' = \dot{\hat{\theta}} = -\omega\hat{r} \ = -\omega\hat{x}'$$

ומכאן את השינוי במהירות בין המערכות

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'\dot{\hat{x}}' + y'\dot{\hat{y}}' \ = \vec{v}' + \omega(x'\hat{y}' - y'\hat{x}')$$

את האיבר האחרון נוכל לפשט אם נעשה את הזיהוי הבא

$$\hat{z}' \times \vec{r}' = \hat{z}' \times (x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}') \ = \hat{z}' \times (x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}') \ = x'\hat{y}' - y'\hat{x}'$$

מערכות יחוס מסתובבות

יחד עם ההבנה שציר הסיבוב הוא (פסאודו)וקטור שגודלו ω וכיוונו $\hat{z}$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$$

ונקבל לבסוף

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

כדי לקבל את היחס בין התאוצות במערכות השונות, נגזור שוב בזמן את הביטוי שקבלנו

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}' + \ddot{z}'\hat{z}' + \dot{x}'\dot{\hat{x}}' + \dot{y}'\dot{\hat{y}}' + \dot{z}'\dot{\hat{z}}'$$
$$= \vec{a}' + \dot{x}'\dot{\hat{x}}' + \dot{y}'\dot{\hat{y}}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

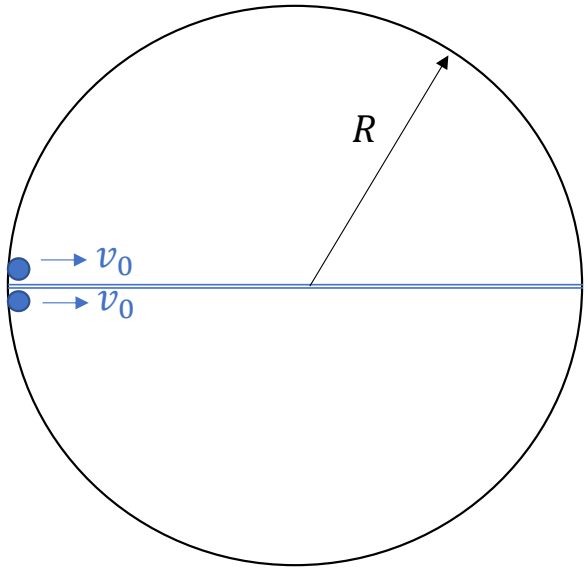
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{תאוצת קוריוליס}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{תאוצה צנטריפוגלית}}}$$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 2 (שאלה 3 ב-PDF)

דיסקה אופקית חלקה ברדיוס R מסתובבת בתדירות זוויתית ω קבועה. על הדיסקה מחיצה חלקה ושני גופים נקודתיים בעלי מסה m, הממוקמים בקצה הדיסקה. למסות מהירות התחלתית v_o לכיוון מרכז הדיסקה (יחסית לדיסקה המסתובבת).

מהם רכיבי התאוצה של המסות ברגע הראשון במערכת הדיסקה? איזו גוף ישאר צמוד למחיצה?



מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 2 - פתרון

במערכת הצירים הקרטזיים של מערכת היחוס המסתובבת, המהירות היא

$$\vec{v}' = v_0\hat{x}'$$

ווקטור הסיבוב הוא

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{z}'$$

מהקשר בין התאוצות במערכות השונות נקבל

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

ואם נכפיל במסה של הגוף נקבל

$$m\vec{a}' = \vec{F}'_{tot} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cent}$$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 2 - פתרון

נחשב במפורש את הכוחות

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\omega v_0(\hat{z}' \times \hat{x}') = -2m\omega v_0 \hat{y}'$$

$$\vec{F}_{cent} = -m\omega^2(-R)\big(\underbrace{\hat{z}' \times \underbrace{(\hat{z}' \times \hat{x}')}_{\hat{y}'}}_{-\hat{x}'}\big) = -m\omega^2 R\hat{x}'$$

וסה"כ

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{ext} - 2m\omega v_0 \hat{y}' - m\omega^2 R\hat{x}'$$

ונניח שאין כוחות חיצוניים. עבור הגוף העליון, יש לנו גם את כח הנורמל מהמחיצה שדוחף אותו למעלה - $\vec{F} = N\hat{y}'$, כך שעבורו

$$m\vec{a}' = (N - 2m\omega v_0)\hat{y}' - m\omega^2 R\hat{x}'$$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 2 - פתרון

ומכיוון שהנורמל מתנגד לכל תאוצה שיש לגוף לתוך המחיצה (מפני שהמחיצה קבועה במערכת המסתובבת), נקבל שהתאוצה של הגוף העליון היא

$$\vec{a}'_{up} = -\omega^2 R\hat{x}'$$

ואין לה רכיב ב-$\hat{y}$, אז היא תשאר לאורך המחיצה.

לעומת זאת התאוצה של הגוף התחתון, שלא חוו את הנורמל מהמחיצה, היא

$$\vec{a}'_{down} = -2\omega v_0\hat{y}' - \omega^2 R\hat{x}'$$

והוא מתנתק מהמחיצה בתחילת התנועה.

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 (שאלה 4 מה-PDF)

כדור הארץ מסתובב סביב צירו בתדירות זוויתית של $\omega = 7.292 \cdot 10^{-5}\ rad/s$, ורדיוסו $R_{\oplus} = 6.37 \cdot 10^{6}\ m$. תאוצת הכובד על פני כדור הארץ היא $g_0 = 9.81\ m/s^2$.

אבן מונחת על פני כדור הארץ בקו רוחב λ, במנוחה ביחס לכדור הארץ.

א. היכן יש למקם את ראשית הצירים כדי לחשב כוחות מדומים על פני כדור הארץ?

ב. מישהו מרים את האבן ושומט אותה. מהי תאוצת הכובד האפקטיבית, $\vec{g}$, שמרגישה האבן בזמן השמיטה? ואם זה לוקח שנה?

ג. מהם רכיבי התאוצה הצנטריפוגלית לאורך הציר הרדיאלי ולאורך הכיוון צפון-דרום המשיק לנקודה? מהי הסטיה בזווית מהכיוון הרדיאלי של תאוצת הכובד האפקטיבית שמתקבלת כתוצאה מכך?

ד. כעת האבן נופלת נפילה חופשית. מהי גודלה וכוונה של תאוצת קוריוליס שהאבן מרגיש? באיזה כיוון תסטה האבן בחצי הכדור הצפוני? והדרומי?

ה. כעת נזרקת האבן אפקית במהירות קבועה v'. מהי תאוצת קוריוליס במקרה הזה?

ו. כעת $\lambda = 45°$, והאבן נזרקת למעלה (לכיוון $\hat{z}$) במהירות $v_0 = 10\ m/s$. היכן ינחת הגוף?

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

א. היכן יש למקם את ראשית הצירים כדי לחשב כוחות מדומים על פני כדור הארץ?

נרצה שצירי הסיבוב של שתי המערכות יתלכדו. מטעמי סימטריה (אנחנו מדברים על כדור, שהיא צורה עם רדיוס קבוע), נרצה למקם את הראשיתות במרכז כדור הארץ.

ב. מישהו מרים את האבן ושומט אותה. מהי תאוצת הכובד האפקטיבית, $\vec{g}$, שמרגישה האבן בזמן השמיטה? ואם זה לוקח שנה?

נשתמש בביטוי שמקשר בין התאוצה במערכת מסתובבת O' לבין מערכת קבועה O (כאשר כיוון ציר הסיבוב ומיקומי הראשיתות מתלכדים)

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

והתאוצה החיצונית היא תאוצת הכובד

$$\vec{a} = \vec{g}_0$$

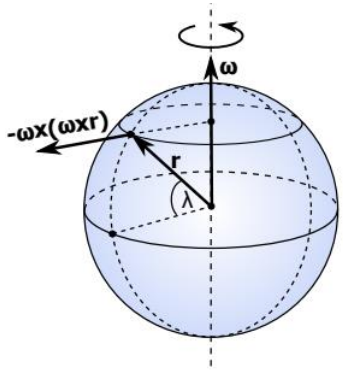
נתחיל ממנוחה כך ש-$\vec{v}' = 0$, ולכן התאוצה שתרגיש האבן בתחילת התנועה תהיה

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

תאוצת הכובד $\vec{g}_0$ מצביע לכיוון מרכז כדור הארץ (בהנחה שהוא עגול), ווקטור הסיבוב מצביע לכיוון צפון (שהוא z בשתי המערכות). כדי לקשר בין הכיוונים נגדיר את הזווית λ בתור הזווית בין מישור הסיבוב ב- $z = 0$ לבין וקטור המיקום של האבן



ונראה שהאיבר $-\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$ מצביע במקבל לרכיב של וקטור המיקום שמוטל על מישור הסיבוב.
נחשב את גודלו

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}'| = \omega R_{\oplus} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \omega R_{\oplus} \cos\lambda$$

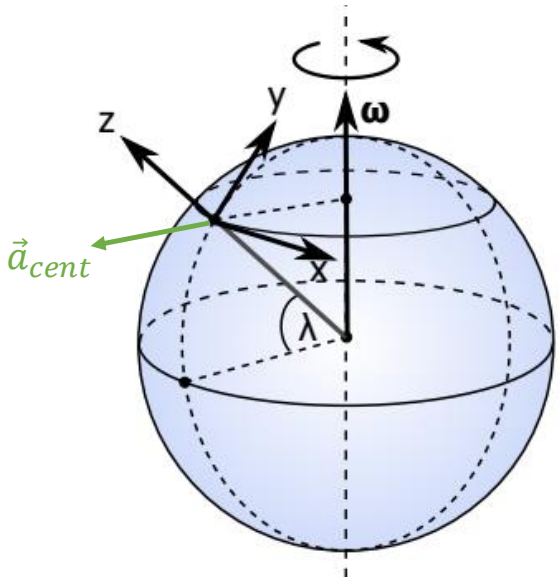
$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = \omega^2 R_{\oplus} \cos\lambda \approx 3.34 \cdot 10^{-2} \cos\lambda \ m/s^2$$

ונראה שהתאוצה הזאת קטנה ככל שמתקרבים לקטבים, וגם שהיא קטנה (בשני סדרי גודל) מתאוצת הכובד $\vec{g}_0$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

ג. מהם רכיבי התאוצה הצנטריפוגלית לאורך הציר הרדיאלי ולאורך הכיוון צפון-דרום המשיק לנקודה? מהי הסטיה בזווית מהכיוון הרדיאלי של תאוצת הכובד האפקטיבית שמתקבלת כתוצאה מכך?



נבחר מערכת צירים חדשה שראשתה באבן וכיווניה כך ש-$\hat{z}$ מצביע לכיוון ההפוך למרכז כדור הארץ ($\hat{r}$), ו-$\hat{y}$ מצביע צפונה.

נסמן את התאוצה הצנטרפוגלית לעומת המערכת הזאת ונראה שהיא יוצרת זווית ל ביחס לציר z, כך שהפירוק לרכיבים יהיה

$$\vec{a}_{cent} = a_{cent}\cos\lambda\,\hat{z} - a_{cent}\sin\lambda\,\hat{y}$$

בסעיף הקודם קבלנו

$$a_{cent} = \omega^2 R_{\oplus}\cos\lambda$$

ולכן

$$\vec{a}_{cent} = \omega^2 R_{\oplus}\cos^2\lambda\,\hat{z} - \frac{1}{2}\omega^2 R_{\oplus}\sin 2\lambda\,\hat{y}$$

*בחצי הדרומי של כדור הארץ $\lambda \to -\lambda$ והכיוון של $\hat{y}$ מתהפך

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

בסעיף הקודם ראינו שתאוצת הכובד האפקטיבית היא

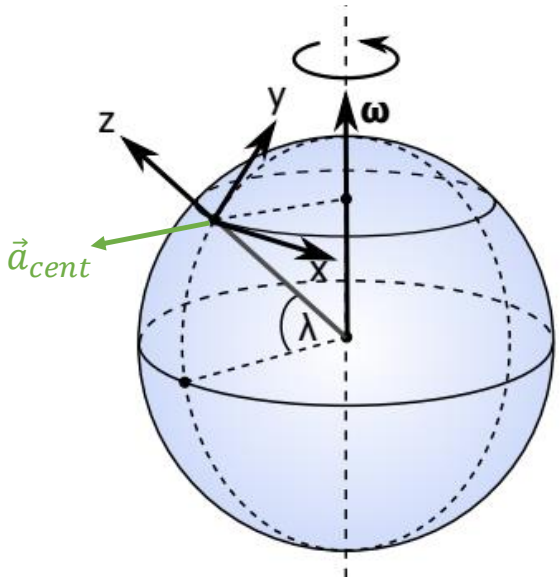
$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

ומכאן הרכיב שהרדיאלי של תאוצת הכובד האפקטיבית יהיה

$$g_z = g_0 - \omega^2 R_\oplus \cos^2 \lambda$$

והרכיב המשיקי (לכיוון צפון) יהיה

$$g_y = -\frac{1}{2}\omega^2 R_\oplus \sin 2\lambda$$



והסטייה של תאוצת הכובד האפקטיבית מתאוצת הכובד g_0 תהיה

$$\tan\alpha = \frac{|g_y|}{|g_z|} = \left|\frac{\frac{1}{2}\omega^2 R_\oplus \sin 2\lambda}{g_0 - \omega^2 R_\oplus \cos^2 \lambda}\right| \approx 0$$

כיוון ש-$g_0 \gg \omega^2 R_\oplus$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

ד. כעת האבן נופלת נפילה חופשית. מהי גודלה וכוונה של תאוצת קוריוליס שהאבן מרגיש? באיזה כיוון תסטה האבן בחצי הכדור הצפוני? והדרומי?

בנפילה חופשית, המהירות $\vec{v}'$ היא בכיוון מרכז כדור הארץ (בקירוב, כי ראינו שהסטייה מהתאוצה הצנטרפוגלית זניחה). נשתמש בקואורדינטות מהסעיף הקודם ונכתוב במפורש

$$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}' \ = -2\omega v'(\cos\lambda\,\hat{y} + \sin\lambda\,\hat{z}) \times \hat{z} \ = -2\omega v' \cos\lambda\,\hat{x}$$

כלומר תאוצת קוריוליס מצביעה מזרחה. בחצי הכדור הדרומי, כאשר $\lambda \to -\lambda$, נקבל שתאוצת קוריוליס עדיין תצביעה מזרחה.

ה. כעת נזרקת האבן אפקית במהירות קבועה v'. מהי תאוצת קוריוליס במקרה הזה?

במקרה של זריקה אופקית נקבל שהמהירות תתפרק לרכיבים

$$\vec{v}' = v'_x\hat{x} + v'_y\hat{y}$$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

ולכן תאוצת קוריוליס תהיה

$$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_0 = -2\omega(\cos\lambda\,\hat{y} + \sin\lambda\,\hat{z}) \times (v'_x\hat{x} + v'_y\hat{y})$$
$$= -2\omega\left(-\cos\lambda\, v'_x\hat{z} + \sin\lambda\left(v'_x\hat{y} - v'_y\hat{x}\right)\right)$$

קבלנו שלתאוצת קוריוליס יש גם רכיב אופקי (במקביל לפני כדור הארץ) שמתאפס בקו המשווה, וגם רכיב אנכי לפני כדור הארץ שמתאפס בקטבים.

ו. כעת $\lambda = 45°$, והאבן נזרקת למעלה (לכיוון $\hat{z}$) במהירות $v_0 = 10\ m/s$. היכן ינחת הגוף?

נכתוב במפורש

$$\vec{a}'(t) = -g\hat{z} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'(t) - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'(t)\right)$$

זו בעיה בתאוצה משתנה וקשה לפתור תנועה כזאת באופן אנליטי. נבצע כמה קירובים כדי לפשט אותה

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

מכיוון שווקטור המיקום $\vec{r}'$ מורכב ברובו מרדיוס כדור הארץ, נקרב אותו להיות קבוע

$$\vec{r}' \approx R_{\oplus}\hat{z}$$

ומכיוון שהתאוצה מורכבת ברובה הגדול מתאוצת הכובד על פני כדור הארץ, נקרב את המהירות להיות

$$\vec{v}' \approx (v_0 - g_0 t)\,\hat{z}$$

כלומר – אנחנו מניחים שהשינויים האופקיים במהירות (וגם זה האנכי שנובע מהתאוצה הצנטריפוגלית) זניחים לעומת השינוי שנובע מתאוצת הכובד.

נמצא עכשיו את הסטיות במיקומי האופקיים, $\Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y}$, שנובעים מהכוחות המדומים, תחת ההנחות שביצענו

$$\vec{a}_{cor}(t) = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'(t) = -2\omega(v_0 - gt)\cos\lambda\,\hat{x}$$

$$\vec{v}_{cor}(t) = \int \vec{a}_{cor}\,dt = -\hat{x}2\omega\cos\lambda\int(v_0 - gt')\,dt' = -2\omega\cos\lambda\,(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{x}$$

מערכות יחוס מסתובבות

שאלה 3 – פתרון

והסטייה במיקום תהיה

$$\vec{r}_{cor}(t) = -\hat{x}2\omega\cos\lambda\int\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)dt' \ = -2\omega\cos\lambda\,(\frac{1}{2}v_0 t^2 - \frac{1}{6}gt^3)\hat{x}$$

כאשר $x_0 = 0$ מבחירת מערכת הקואורדינטות שלנו.

הזמן שבו המסה תנחת הוא $t_f = \frac{2v_0}{g_0} \approx 2\ s$, ולכן נציב ונקבל

$$\Delta x_{cor} = -2\omega\cos\lambda\left(\frac{1}{2}v_0\left(\frac{2v_0}{g_0}\right)^2 - \frac{1}{6}g\left(\frac{2v_0}{g_0}\right)^3\right) = -\frac{4}{3}\omega\frac{v_0^3}{g_0^2}\cos\lambda \ \approx -0.7\ mm$$

הרכיב האופקי של התאוצה הצנטרפוגלית ייתן בלנו

$$\Delta y_{cent} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_{cent}\cdot(\hat{x}+\hat{y})\right)t_f^2 \ = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\omega^2 R_\oplus\sin 2\lambda\right)\left(\frac{2v_0}{g_0}\right)^2 \approx -3\ mm$$